物理学Ｆレポート解答（１月２０日出題分）

■問題１）

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \tag{1}$$

なので

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad c_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{2}$$

となる.

■問題２）

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = c_1|a_3\rangle + c_2|a_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_1-c_2\end{pmatrix} \tag{3}$$

なので，連立方程式

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 \tag{4}$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 \tag{5}$$

を解いて，

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{6}$$

となる.

■問題３）

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = c_1|a_5\rangle + c_2|a_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}c_1+\mathrm{i}c_2\\\mathrm{i}c_1+c_2\end{pmatrix} \tag{7}$$

なので，連立方程式

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}c_2 \tag{8}$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 \tag{9}$$

を解いて，

$$c_1 = \frac{1-3\mathrm{i}}{2\sqrt{5}}, \qquad c_2 = \frac{3-\mathrm{i}}{2\sqrt{5}} \tag{10}$$

となる.

■問題４）　まず，$\hat{A}_i$ を測りたいときは $|\alpha\rangle$ を $\hat{A}_i$ の固有ベクトルの和の形に書き換えることが必要．一方，前回のレポートの内容から

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1|a_3\rangle &= |a_3\rangle, & \hat{A}_1|a_4\rangle &= -|a_4\rangle \\
\hat{A}_2|a_5\rangle &= |a_5\rangle, & \hat{A}_2|a_6\rangle &= -|a_6\rangle \\
\hat{A}_3|a_1\rangle &= |a_1\rangle, & \hat{A}_3|a_2\rangle &= -|a_2\rangle
\end{aligned}$$

である．よって，$\hat{A}_1$ を測りたいときは $|\alpha\rangle = c_1|a_3\rangle + c_2|a_4\rangle$，$\hat{A}_2$ を測りたいときは $|\alpha\rangle = c_1|a_5\rangle + c_2|a_6\rangle$，$\hat{A}_3$ を測りたいときは $|\alpha\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$ と書き換えればよい．このとき，$|c_1|^2$，$|c_2|^2$ がそれぞれ測定値が $+1$，-1 になる確率である．期待値は同じ状態 $|\alpha\rangle$ をたくさん用意して測定したときの平均値であり，「(測定値)×(確率)」をすべての可能な測定値について和をとればよい．

$\hat{A}_1$ に対しては，$c_1 = 2/\sqrt{5}$，$c_2 = -1/\sqrt{5}$ であり，期待値は

$$(+1) \times \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 + (-1) \times \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{3}{5}$$

と求まる．同様に，$\hat{A}_2$ に対しては，$c_1 = (1-3\mathrm{i})/(2\sqrt{5})$，$c_2 = (3-\mathrm{i})/(2\sqrt{5})$ であり，期待値は

$$(+1) \times \left|\frac{1-3\mathrm{i}}{2\sqrt{5}}\right|^2 + (-1) \times \left|\frac{3-\mathrm{i}}{2\sqrt{5}}\right| = (+1) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

と求まる．最後，$\hat{A}_3$ に対しては，$c_1 = 1/\sqrt{10}$，$c_2 = 3/\sqrt{10}$ であり，期待値は

$$(+1) \times \left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right|^2 + (-1) \times \left|\frac{3}{\sqrt{10}}\right|^2 = -\frac{4}{5}$$

と求まる．