電荷とは

電荷

“電気のもと，電気的相互作用のもと”

- 原子：原子核＋電子
- 原子核：正の電荷
- 電子：負の電荷

最小の電荷

- 電子の持つ電荷：$e \sim -1.602 \times 10^{-19}$[C]，C：クーロン（電荷の単位）
- $|e|$ が電荷の大きさの最小単位
- 原子核の持つ電荷：$Z|e|$，Z は原子番号
- ただし，$|e|$ は非常に小さいので日常的には電荷の量は連続と思って良い

電荷の保存則

- 電荷は保存する：急に現れたり消えたりしない

単位の話（その２）

- クーロン [C] 電荷
- アンペア [A] : クーロン/秒 [C/s] 電流
- ボルト [V] 電圧
- ワット [W] : 電圧 × 電流 [V·A] 仕事率

仕事率

- [W] = [V·A] = [J/s] （ジュール [J] エネルギー）

電気的な相互作用

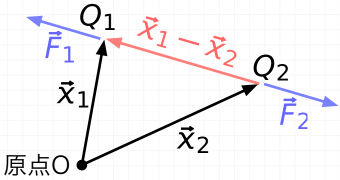
クーロンの法則

位置 $\vec{x}_1$ に電荷 Q_1 の点電荷 1 が，位置 $\vec{x}_2$ に電荷 Q_2 の点電荷 2 がそれぞれあるとき，点電荷 1， 2，が感じる力 $\vec{F}_1$， $\vec{F}_2$ は，

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

となる．（$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の長さ）

- 点電荷：電荷は持つが大きさは無視できる物体
- $1/(4\pi\epsilon_0) \sim 8.988\times 10^9$ [N·m^2·C^{-2}]



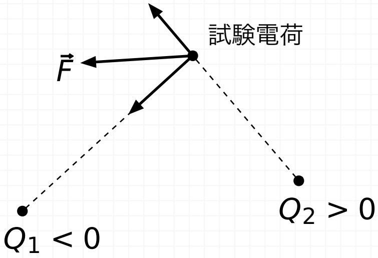
口語訳

- ２つの点電荷の間には働く力の大きさは，電荷の「積」に比例し，距離の「２乗」に反比例する．
- 同符号の電荷は反発し，異符号の電荷は引き合う．
- 距離が近い方が力は強い．

問題設定

- 固定されたいくつかの点電荷がある
- ここにもう 1 つ点電荷（電荷 q_0）を持ち込む.
  - これを試験電荷と呼ぶ
- このとき試験電荷が感じる力は？
  - 便宜上 $q_0 > 0$
  - $q_0 < 0$ ならカの向きが逆になるだけ

固定された電荷が複数あるとき，試験電荷が感じる力は，それぞれの電荷からの力の和（ベクトルの足し算）になる



電場とは

前回の確認

いくつかの固定された電荷があるところへ，試験電荷を持ち込んだ

- 力の向きと強さは位置に依存する
- 各位置でどんな力になるかがわかればよい
- $\vec{F}(\vec{x})$ が知りたい

考え方その１

固定された各電荷と試験電荷の間に働く力をクーロンの法則から求める

ポイント：各電荷の配置が決まった時点で試験電荷に働く力も決まる

考え方その２

固定された各電荷が**電場**を作り，試験電荷は**電場**から力を受ける

クーロンの法則（言い直し）

- 位置 $\vec{x}$ にあり電荷 q を持つ点電荷は位置 $\vec{x}$ における電場 $\vec{E}(\vec{x})$ から

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$$

なる力を受ける

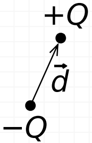
- 位置 $\vec{x}_0$ にあり電荷 Q を持つ点電荷は位置 $\vec{x}$ に

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$$

なる電場を作る

- 複数の（固定された）点電荷があるとき電場は各点電荷の作る電場の和になる

電気双極子



- $+Q$ と $-Q$ の電荷をベクトル $\vec{d}$ だけ離して配置したもの
- 電気双極子モーメント $\vec{p} = Q\vec{d}$
- 原点に双極子をおいたときの遠い位置 $\vec{r}$ での電場
  - 遠い $|\vec{r}| \gg |\vec{d}|$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left\{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right\}, \quad \hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$$

- 内積：$\vec{p}\cdot\hat{r} = |\vec{p}|\cos\theta$（$\theta$：$\vec{p}$ と $\vec{r}$ の間の角度）

電気双極子の重要性

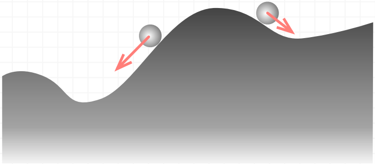
- 総和ゼロの電荷の集合は遠くからは電気双極子にみえる（ことが多い）
- 電気双極子モーメントをもつ分子が存在する：水など

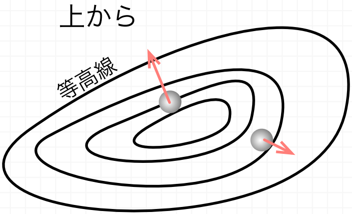
電場と電位

今のところ「電場」は位置に依存する力を使って定義されている

「位置に依存する力」の他の例

- 凹凸のある面にビー玉をおく





電場と電位

凹凸面の勾配をベクトルで表す

- 向き：傾きの最も大きな方向
- 長さ：傾きの大きさ

勾配＝電場

- 勾配の方向へビー玉が力を受ける
- 電場の方向へ電荷が力を受ける

高さ＝電位（または電位差）

- 高いところから低いところへビー玉が動こうとする
- 高電位側から低電位側へ電荷が動こうとする

電位の単位：V（ボルト）

電場と電位の関係

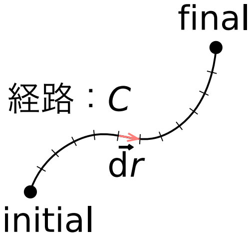
一様な電場 $\vec{E}$ の中でベクトル $\vec{r}$ だけ離れた 2 点間の電位差

- 傾きが一定：距離長で高さ変化大
- 距離が同じ：傾き大で高さ変化大
- 勾配にそう：高さの変化大、勾配に直行：高さ変化なし

$$V_f - V_i = -|\vec{r}||\vec{E}|\cos\theta = -\vec{r}\cdot\vec{E}$$

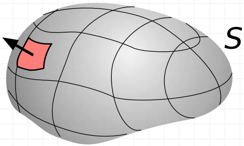
電場が一様でないとき：経路を分割する

$$V_f - V_i = -\int_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$



ガウスの法則

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E} = \frac{Q_{\text{inside } S}}{\epsilon_0}$$



- S：3 次元空間の任意の閉曲面
- $\mathrm{d}\vec{A}$：S 上の微小平面
  - 長さは微小平面の面積，向きは微小平面に垂直で外向き
- $Q_{\text{inside } S}$：S の内部にある電荷の総和

意味

ある閉曲面を貫く電場の総量はその閉曲面内部の電荷の総量を ϵ_0 で割った物に等しい

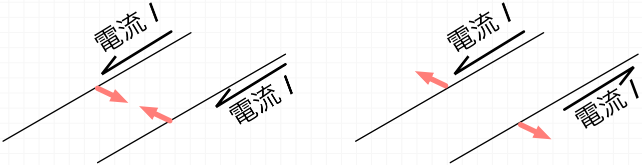
口語訳

電場は正の電荷からわき出し，負の電荷に吸い込まれる

電流と電流の間に働く力

直線電流の場合

- 並行で同じ向き：引き合う
- 並行で反対向き：斥け合う



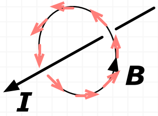
電荷に働く力を電場を使って考えたように，
電流に働く力は磁場を使って考えられる

電荷	電流
電場を作る 電場から力を受ける	磁場を作る 磁場から力を受ける

＊引き続き直線電流を考える

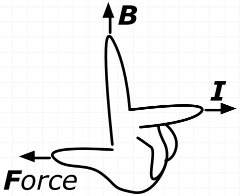
電流が作る磁場

右ねじの法則



電流が磁場から受ける力（電流と磁場が垂直な場合）

フレミング左手の法則



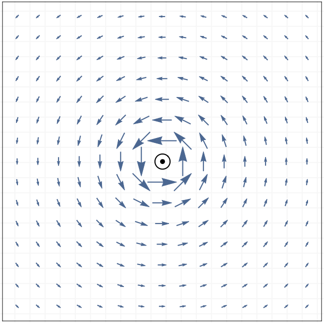
直線電流の作る磁場：詳細

電荷の作る電場のように電流の作る磁場も位置に依存する

- 直線電流の作る磁場の強さ

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$$

- r：電流からの距離
- $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ [T·A^{-1}m]
- 磁場の強さの単位 T（テスラ）



例

- $I = 30\mathrm{A}$, $r = 0.1\mathrm{m}$
- $B \sim 6 \times 10^{-5}\mathrm{T}$
- （参考）日本の地磁気 $4.6 \times 10^{-5}\mathrm{T}$

運動する点電荷が受ける力（一般論）

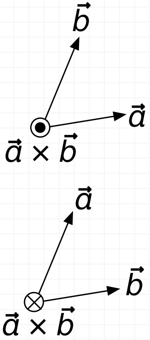
点電荷が磁場から受ける力

ローレンツ力

磁場 $\vec{B}$ の中を速度 $\vec{v}$ で運動する電荷 Q の点電荷は

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

なる力を受ける



$\vec{a} \times \vec{b}$：ベクトルの外積,
向き：$\vec{a}$, $\vec{b}$ 両者に垂直，大きさ：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\theta$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の角度）

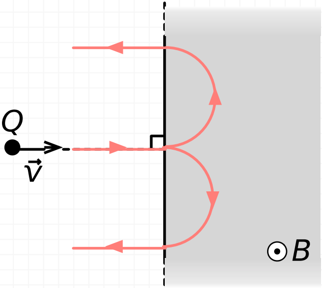
- 電場もあるとき

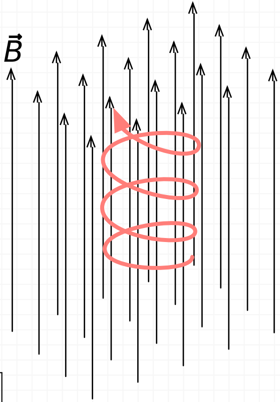
$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

口語訳

- 動いていなければ点電荷は磁場から力を受けない
- 磁場は運動の向きだけ変える

例





教訓

- 電荷を持つ粒子は磁場のある領域に侵入しにくい

教訓

- 一度磁場中に入った粒子は出て行きにくい
- 磁場にそった向きには動ける

一般の電流が作る磁場

ただし，電流等の時間変化はなしとする

閉じた回路が作る磁場（時間変化なし → 回路は閉じていなければならない）

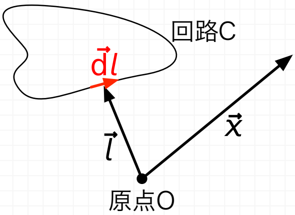
ビオ・サバールの法則

電流 I が流れている回路 C が位置 $\vec{x}$ に作る磁場は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times(\vec{x}-\vec{l})}{|\vec{x}-\vec{l}|^3}$$

となる．（$I\mathrm{d}\vec{l}$ は電流要素，回路の一部分）

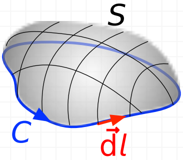
ただし，$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}[\mathrm{T{\cdot}A^{-1}{\cdot}m}]$



アンペールの法則

時間変化なしの場合を考える

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate S}}$$



- C：向きをつけた閉曲線
- $\mathrm{d}\vec{l}$：微小な線要素
- S：C を縁とする曲面
  - 表裏：表から見て縁の閉曲線の向きが反時計回り
- 時間変化さえなければ S の選び方にはよらない
  - 電荷の保存，時間変化がなければ入ってきた電流は必ず出て行く

ある閉曲線にそった磁場を積分した量はその閉曲線を縁とする曲面を貫く電流に μ_0 をかけたものに等しい

口語訳

- 磁場は電流に巻き付く

磁気単極子

- 残された磁場の重要な性質

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

- 時間変化があるときでも成り立つ

意味

電場に対する点電荷の磁場バージョン（磁気単極子）は存在しない

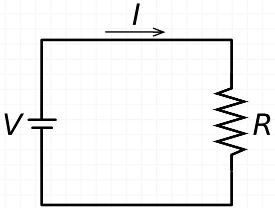
少なくとも見つかっていない

口語訳

- 磁場は沸き出したり吸い込まれたりしない
- N 極だけの磁石は作れない！
- （参考）電場に対するガウスの法則

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside } S}}{\epsilon_0}$$

電流と電圧



オームの法則

$$V = IR$$

- V: 電圧
- I: 電流
- R: 電気抵抗

物質の分類

- 金属：電気を流す
- 絶縁体：電気を流さない
- 半導体：中間

$\boxed{\text{電気抵抗 } R}$: 電気の流しやすさ

＊電気抵抗の大きさだけで金属・絶縁体を決めるわけではない

- 温度が下がると抵抗が下がる ⟶ 金属
- 温度が下がると抵抗が上がる ⟶ 絶縁体

<u>電圧をかければ電流が流れ，いろいろと仕事をさせられる</u>

電磁誘導

ある回路に磁場を使って電流を流す

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B}, \qquad \mathcal{E} = IR$$

- Φ：回路を貫く磁場の総量（磁束）
  - S：回路を縁とする任意の曲面
  - 曲面の裏表はアンペール則のときと同じ
  - 曲面の取り方によらない：磁気単極子は存在しない
- $\mathcal{E}$：誘導起電力
  - 大雑把に言えば電圧 $\mathcal{E}$ の電池をつないだ感じ
  - 実際に流れる電流はオームの法則とかを使って決める

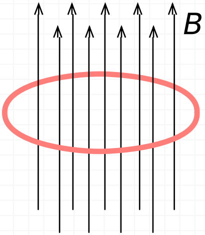
回路を貫く磁場に時間変化があると，誘導起電力が発生する．

レンツの法則

誘導起電力によって生じる電流の向き

必ず磁場の変化を打ち消す方向

- 上向きの磁場が強まったとき ⟶ 下向きの磁場を作る電流が生じる
- 上向きの磁場が弱まったとき ⟶ 上向きの磁場を作る電流が生じる
- 下向きの磁場が強まったとき ⟶ 上向きの磁場を作る電流が生じる
- 下向きの磁場が弱まったとき ⟶ 下向きの磁場を作る電流が生じる



磁場そのものの向きより 時間変化 が重要

2 種類の電磁誘導

電流を流す＝電荷に力を加えるためには 2 通りの方法がある

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

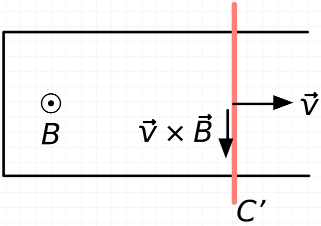
1. 磁場は変化せず，回路が動くことで Φ の時間変化が生じる場合
   $\longrightarrow Q\vec{v} \times \vec{B}$ を使う

2. 回路は動かず，磁場が変化することで Φ の時間変化が生じる場合
   $\longrightarrow Q\vec{E}$ を使う

回路を動かす場合

例

- 回路の一部分 C' を速さ v で動かす
- 磁場は図の向きで，強さは全体で一様（回路の中でも外でも）



このとき...

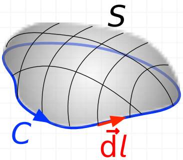
- C' 内の荷電粒子は磁場中を速度 $\vec{v}$ で動いていることになる
- よって C' 内の荷電粒子はローレンツ力 $Q\vec{v}\times\vec{B}$ を受ける
- ローレンツ力によって生じる電流の向きはレンツの法則を満たす

磁場が変化する場合

- まず磁場が変化すると電場が生じ，それが $\vec{F} = Q\vec{E}$ によって起電力を生む

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- C：向きをつけた閉じた回路
- S：C を縁として持つ向きをつけた曲面



（参考）

- 時間変化がないとき

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = 0$$

- これは電場と電位を結びつけるためには重要だった．

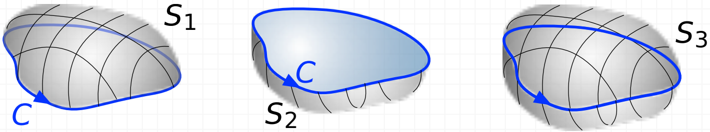
アンペールの法則の修正

- アンペールの法則の説明で時間変化がないことを使っていた

$$\oint_C \vec{\mathrm{d}l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate } S}$$

  - 右辺が曲面の取り方によらない
  - 時間変化があると右辺が局面の選び方＝人間の都合に依存してしまう

- 1 つの閉曲線 C に対して，2 つの曲面 S_1 と S_2 を用意



- S_1 と S_2 は縁を共有するので 2 つあわせれば閉じた曲面になる
- これを S_3 とする

電荷の保存則

- S_3 から出て行く電流の総和= S_3 内の電荷の単位時間あたりの減少量

$$
\begin{aligned}
I_{\text{penetrate } S_1} - I_{\text{penetrate } S_2} &= -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{inside } S_3}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S_3} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} \\
&= -\epsilon_0 \int_{S_1} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \int_{S_2} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

- １行目から２行目：ガウスの法則

よって

$$I_{\text{penetrate } S_1} + \epsilon_0 \int_{S_1} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = I_{\text{penetrate } S_2} + \epsilon_0 \int_{S_2} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

なので

$$I_{\text{penetrate } S} + \epsilon_0 \int_{S} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

は C が与えられれば S の選び方に依存しない.
これを踏まえ，アンペールの法則を時間変化がある場合に拡張する.

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate } S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{S} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

法則を単に矛盾の無いように書き換えただけでなく，電場の時間変化から磁場を作れることを意味している.

マックスウェル方程式

電磁気学のすべての基礎

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside S}}}{\epsilon_0}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

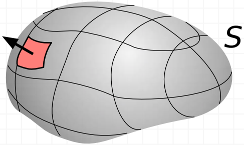
$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate } S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- C : S の縁

マックスウェル方程式

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside S}}}{\epsilon_0}$$



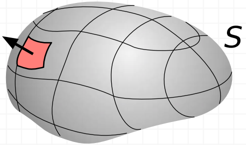
ガウスの法則

クーロンの法則

電場は正の電荷から湧き出し，負の電荷に吸い込まれる

マックスウェル方程式

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

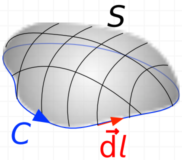


磁場は湧き出したり吸い込まれたりしない

N極だけの磁石は作れない

マックスウェル方程式

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{E} = -\int_S \mathrm{d}\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$



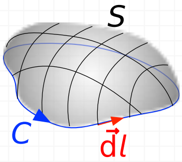
電磁誘導

磁場の時間変化が電場を誘起する

磁場の時間変化に巻きつくように電場が生じる

マックスウェル方程式

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate S}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



アンペールの法則＋電荷保存による修正

磁場は電流に巻きつく

電場の時間変化が磁場を誘起する

マックスウェル方程式：微分形

- 「マックスウェル方程式」としては以下の表現の方がよく使われる
- 意味は全く同じ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- $\vec{\nabla}\cdot$：微分演算子「発散」（空間微分）
- $\vec{\nabla}\times$：微分演算子「回転」（空間微分）
- ρ：電荷 密度
- $\vec{j}$：電流 密度

真空中のマックスウェル方程式（微分形）

- 電荷密度と電流密度ゼロ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

3 番目と 4 番目の組み合わせ

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

空間 2 階微分 $\propto$ 時間 2 階微分

↓

波動方程式

↓

電磁波

真空中のマックスウェル方程式の場合

典型的な解

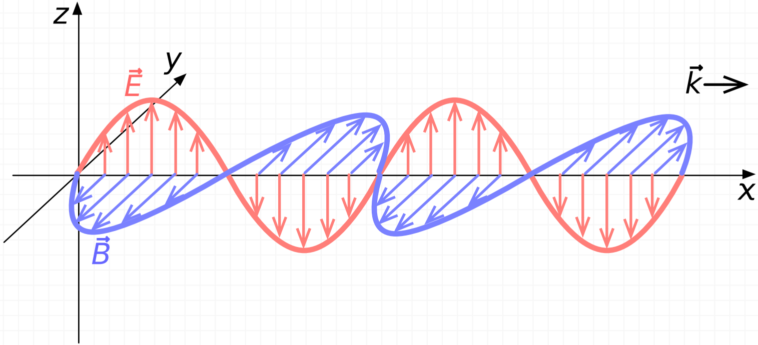
$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\hat{k}\times\vec{E}_0}{c} \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)$$

- $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$: $\vec{k}$ と $\vec{E}_0$ は垂直
- $\vec{B}$ は $\vec{k}$ と $\vec{E}$ の両方に垂直
- $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $\omega = c|\vec{k}|$, $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$
- θ : 位相，振動のタイミングを決める

典型的な解の特徴

- 空間的に振動：波長 $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$
- 時間的に振動：周波数（単位時間あたり何回振動するか）$\nu = \omega/2\pi$
- 周波数と波長の関係：$\nu = c/\lambda$
- 速さ $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \sim 3 \times 10^8$[m/s] で $\vec{k}$ の向きに進む
- 電場と磁場は進行方向に垂直
- 電場と磁場は互いに垂直



電磁波の特徴付け

$\vec{k}$ と $\vec{E}_0$（と θ）が電磁波を特徴付ける

1. $\vec{k}$ の向き：電磁波の進む向き
2. $\vec{k}$ の大きさ：電磁波の名前，光の色
   - 波長 $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$
   - 振動数 $\nu = c|\vec{k}|/2\pi$
3. $\vec{E}_0$ の大きさ：電磁波の強度
   - 強度 $I \propto |\vec{E}_0|^2$
4. $\vec{E}_0$ の向き：偏光

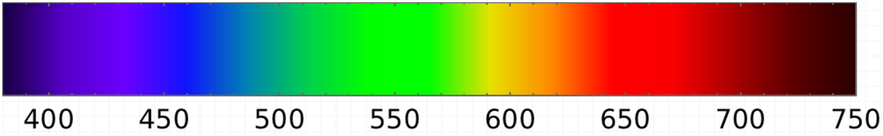
波長の違い

＊波長ごとに呼び方が違う

	波長	細分化
電波	0.1mm 以上	マイクロ波，超短波，短波，etc
光	10nm-1mm	赤外線，可視光，紫外線
X 線	1nm 以下	
γ 線	10pm 以下	

波長と色

- 可視光：波長 350nm-750nm
- 波長＝色
- 波長の短い方から，紫，青，緑，黄，橙，赤



偏光

明るさ（強度）と色（波長）に続く第３の性質

- 直線偏光：$\vec{E}_0$ の向きが偏光の向き

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\theta)$$

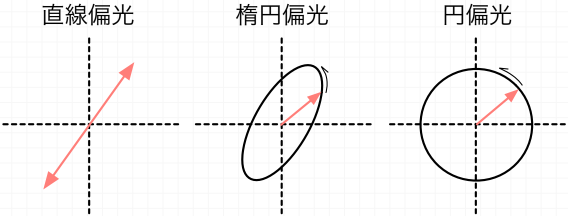
- 円偏光：$\vec{E}_0$ の向きが回転（$\hat{e}_1\perp\hat{e}_2$, $|\hat{e}_1|=|\hat{e}_2|=1$）

$$\vec{E}(\vec{x},t)=E_0\hat{e}_1\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})+E_0\hat{e}_2\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})$$

- 楕円偏光：円偏光と直線偏光の中間

$$\vec{E}(\vec{x},t)=E_1\hat{e}_1\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})+E_2\hat{e}_2\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})$$

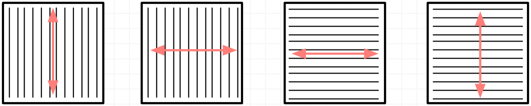
- 偏光していない光（自然光）



偏光板による光の制御

偏光板：偏光が特定の向きの電磁波のみ透過する

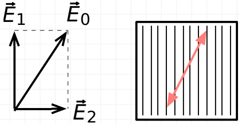
- 直線偏光



透過　透過せず　透過　透過せず

- 斜めの場合は？

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}) = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{k})$$

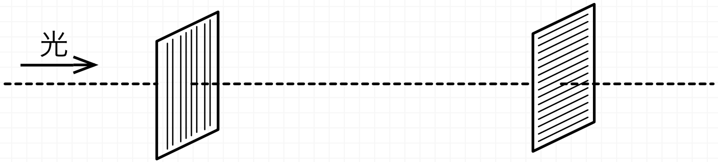


$\vec{E}_1$の分だけ透過

- 透過後の偏光の向き：$\vec{E}_1$ の向き
- 透過後の光の強度 I：$I \propto |\vec{E}_1|^2 < |\vec{E}_0|^2$

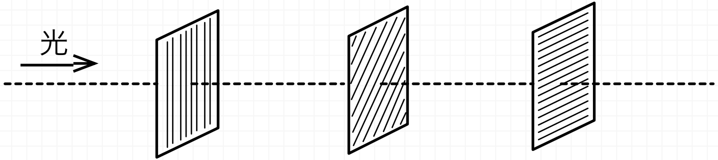
偏光板による光の制御

偏光板２枚で光をブロックできる



- １枚目でブロックされなかった分は２枚目でブロックされる

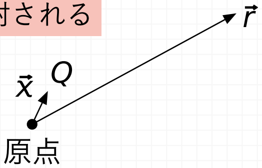
もう１枚挟んだら…



- １枚目で完全にブロックされる場合を除き１番右まで透過する

電磁波の放射

荷電粒子が加速度を持つとき電磁波が放射される



- 荷電粒子の位置 $\vec{x}$，電場の観測点 $\vec{r}$
- $|\vec{x}| \ll |\vec{r}|$ のとき…

$$\vec{E}(\vec{r},t) \sim -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{|\vec{r}|}\{\ddot{\vec{x}}(t') - (\hat{r}\cdot\ddot{\vec{x}}(t'))\hat{r}\}$$

$$\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|,\ t' = t - |\vec{r}|/c$$

$\ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$：位置の時間による 2 階微分，速度の時間微分

- $\ddot{\vec{x}}(t') - (\hat{r}\cdot\ddot{\vec{x}}(t'))\hat{r}$ は荷電粒子の加速度の視線に垂直な成分

電磁波の放射（続き）

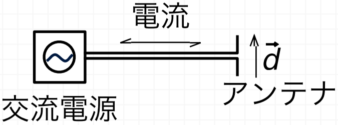
単振動する荷電粒子からの放射

- $\vec{x}(t) = \vec{d}\sin(\omega t + \theta)$ のとき

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \sim \frac{Q\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{|\vec{r}|}\{\vec{d} - (\hat{r}\cdot\vec{d})\hat{r}\}\sin(\omega t - k|\vec{r}| + \theta)$$

$$k = \omega/c$$

微小双極子アンテナ



- 単振動する荷電粒子からの電磁波とだいたい同じ

電磁波の重ね合わせと干渉

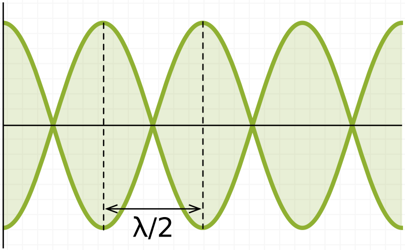
複数の波源があるとき実際の電磁波はそれらの足し算（重ね合わせ）

強めあったり弱めあったりする → 干渉

簡単な例

- 右向きの波と左向きの波を重ね合わせると 定在波 ができる

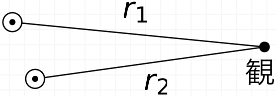
$$A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx) = 2A\sin(\omega t)\cos(kx)$$



＊常に打ち消し合う場所と常に強め合う場所がある

電磁波の重ね合わせと干渉

微小双極子アンテナの場合



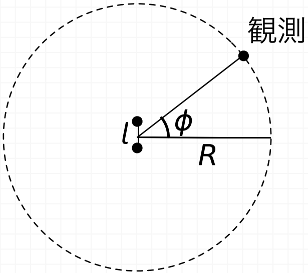
$$\frac{1}{|\vec{r}_1|}\sin(\omega t - k|\vec{r}_1| + \theta_1) + \frac{1}{|\vec{r}_2|}\sin(\omega t - k|\vec{r}_2| + \theta_2)$$

- アンテナからの距離の違い ⟶ sin 関数の中身の違い
  ⟶ 強め合う場所と弱め合う場所がある
- 距離が同じでも位相 θ が違えば強め合ったり弱め合ったりする

* $|r_1 - r_2| \ll r_1, r_2$ なら $\frac{1}{|\vec{r}|}$ の分の違いは無視できる

干渉の典型的な例

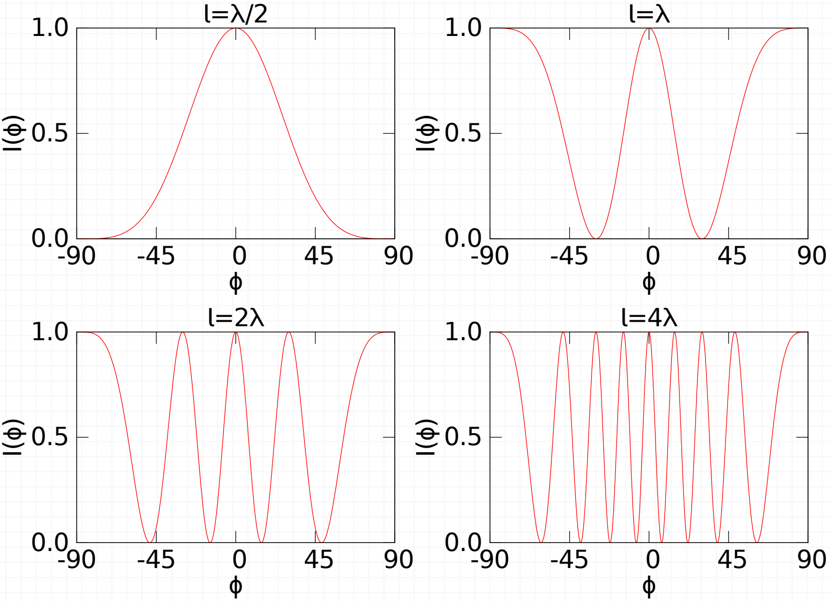
位相のそろった（$= \theta$ が等しい）アンテナ２つで実験



- $l \ll R$ のときの角度 ϕ の方向の電磁波の強度 $I(\phi)$

$$I(\phi) \propto \left(\cos\left(\frac{\pi l}{\lambda}\sin\phi\right)\right)^2 \qquad \lambda：波長$$

角度の違い ⟷ 距離の差の違い


l=λ/2
l=λ
l=2λ
l=4λ
I(φ)
φ
1.0
0.5
0.0
-90
-45
0
45
90

量子力学

- ミクロな世界の法則
- 量子力学 $\longleftrightarrow$ 古典力学

日常の常識とはかけ離れた法則

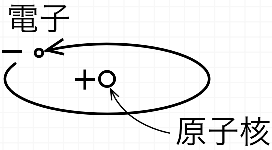
ミクロな世界とは

分子・原子と同程度以下の大きさの世界

原子の安定性

原子は安定に存在できるか？

原子の素朴なイメージ



- クーロン力と遠心力の釣り合い
  ⟶ 原子はつぶれずに存在？

しかし…

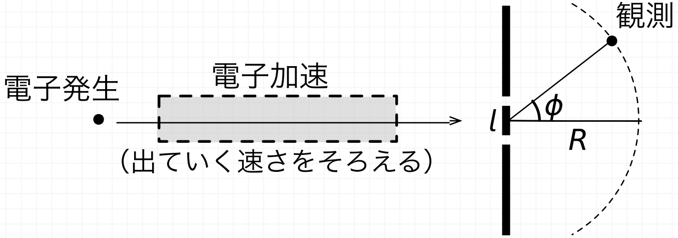
- 円運動 → 電子が加速度を持っている
- 電磁波を放射してエネルギーを失う
- 遠心力が弱まってつぶれる？

もちろん，実際には原子は安定に存在する

ミクロの世界を支配する新しい法則があるはず

二重スリット実験

実験のセットアップ



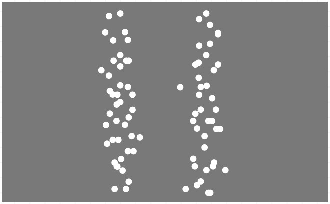
- 電子はひとつずつ入射する
- 電子の進む向きには多少のばらつきがある

二重スリット実験

予想される結果

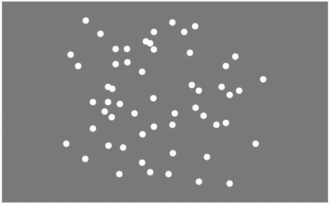
- スリットの壁に進路を変更されることが少ない場合

スクリーン



- スリットの壁に進路を変更されることが多い場合

スクリーン



実験結果

http://www.hitachi.co.jp/rd/portal/research/em/doubleslit.html

ポイント

- 「着弾点」はひとつひとつ見分けられる
- 全体として電磁波の干渉パターンのような縞模様が見える

教訓

- 電子は確かに数えられる粒子のようだ
- にも関わらず電磁波の様に干渉を起こす

電子は波動と粒子の性質を同時に持つ！

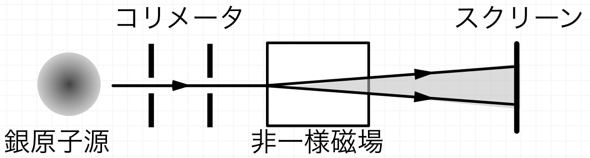
粒子と波動の二重性

＊電子の干渉は２つの電子によって引き起こされる訳ではない

シュテルン・ゲルラッハ実験

＊銀原子のスピンの向きを測る実験

実験のセットアップ



何を測っているか

スピンの z 成分＝「小さい磁石」の向きをベクトルで表したときの z 成分

- 非一様磁場：スピンの z 成分に応じた力を与える，$F_z \sim -s_z \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$
- 軌道の曲げられ方でスピンの z 成分がわかる

シュテルン・ゲルラッハ実験

予想される結果

- スピンの向きは初めはランダムと仮定
- スピンの z 成分は $+1$ から -1 まで連続的に分布

実際の結果

- 連続的に分布ではなく 2 つに別れる
- 上向きと下向きのみで斜めや横がない

教訓

物理量の量子化（＝物理量がとびとびの値をとる）の例

シュテルン・ゲルラッハ実験の拡張

- x 成分を測ってもよい

  ∗ それぞれの成分を測る実験装置の記号

$\boxed{Z}$ $\boxed{X}$

「フィルター」

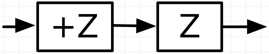
- 各成分を測って $+1$ または -1 のものだけ抜き出すことができる

  ∗ 各成分に対し $+1$ か -1 を抜き出す装置の記号

$\boxed{+Z}$ $\boxed{-Z}$ $\boxed{+X}$ $\boxed{-X}$

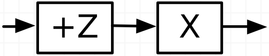
シュテルン・ゲルラッハ実験の拡張

+Z/Z 実験



- 最後 Z 成分は +1 のみ観測される

+Z/X 実験



- 最後 X 成分は +1 と −1 が等確率で観測される

+z 方向を向いた状態は+x 方向を向いた状態でもあり-x 方向を向いた状態でもある

教訓

状態の重ね合わせ

量子力学の基礎

- 粒子の運動，またはスピンの動きに関する法則

ポイント：粒子やスピンの状態をどう記述するか？

状態の記述：古典力学の場合

- 粒子の運動：位置と運動量
- スピン
  - 磁石と思うと：磁石の強さと向き
  - 回転と思うと：回転軸の方向と速さ

物理量を数字（実数）で書いて状態を表す

- 物理量を観測するとその数字の値になる
- 状態が決まれば観測される物理量も決まる！

状態の記述：量子力学の場合

- 状態：ノルム 1 の複素ベクトル
- 物理量：複素エルミート行列

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}, \quad (\hat{A}^\dagger)_{ij} = (\hat{A}_{ji})^*$$

- 成分の数は互いに直交する状態の数で決まる
  - 互いに直交する状態＝完全に異なる状態

例）

物理量 $$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

状態 $$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

量子力学における観測

- 物理量が行列で書かれるとはいえ，観測したら数字になるべき
  - 例）位置 x，スピン（± 1）
- ここで活躍するのが行列の固有値

量子力学における観測の基本法則：

状態 $|\alpha\rangle$ がある物理量 $\hat{A}$ の固有状態（固有ベクトル）であるとき物理量 $\hat{A}$ の観測値はその固有値 ϵ_α となる

固有状態でない状態の観測

- 物理量 $\hat{A}$ の測定をしたい
- $\hat{A}$ の固有状態でない状態も $\hat{A}$ の固有状態の和に分解できる

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_i |\hat{A} : \epsilon_i\rangle, \quad \sum_i |c_i|^2 = 1$$

便宜上，$|\hat{A} : \epsilon_i\rangle$ は $\hat{A}$ の固有状態で固有値が ϵ_i のもの

非固有状態の観測の基本法則：

状態 $|\alpha\rangle$ について物理量 $\hat{A}$ の測定を行うと，確率 $|c_i|^2$ で ϵ_i が観測される

さらに

測定後の状態は選ばれた固有値に対応する固有状態になる．

最重要点

- 測定値は確率的にしか決まらない！
- 観測が状態を変える！

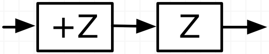
* この法則を確かめるには同じ実験を繰り返す必要があり

シュテルン・ゲルラッハ実験の説明

スピンの量子化

- 初めはスピンの向きランダム
- $\hat{S}_z$ の固有状態？ $\hat{S}_x$ の固有状態？ どちらでも無い？
  - スピンは「斜め」や「真横」かも
- しかし，$\hat{S}_z$ の固有値は $+1$ か -1 の 2 つしかない
- 最初スピンが真横をむく状態（$\hat{S}_x$ の固有状態）であっても $\hat{S}_z$ の測定値はゼロではなく $+1$ と -1 が半分ずつ現れる

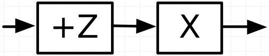
+Z/Z 実験



- 測定後：測定された固有値に対応する固有状態
- まず $\hat{S}_z$ を測って測定値が $+1$ の状態のみ抜き出した場合，続けて $\hat{S}_z$ を測れば**固有状態なので** 100%$+1$ が現れ -1 は現れない

シュテルン・ゲルラッハ実験の説明（続き）

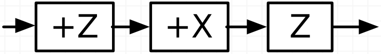
+Z/X 実験



$$|\hat{S}_z : +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x : +1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x : -1\rangle$$

- 上式より+Z 実験後に X 実験を行うと測定値 $+1$ と -1 が 50%ずつの確率で得られる

+Z/+X/Z 実験



- +Z/+X までで，$|\hat{S}_z : +1\rangle \to |\hat{S}_x : +1\rangle$ となっているので，最後は半々の確率で $+1$ と -1 が得られる
- +X を挟まなかった場合には最後 -1 は出てこないことに注意

波動関数

粒子の運動の量子力学的表現

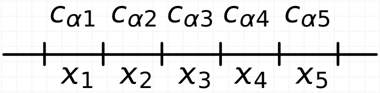
状態を座標の固有状態の和（重ね合わせ）として書く！

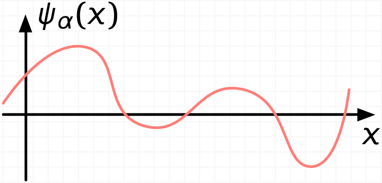
- 座標の固有状態 $|x\rangle$：位置を測定すれば必ず x になる状態

波動関数

- ベクトルの成分数：全く異なる状態の数
- 座標が違う ⟶ 違う状態 ⟶ 可能な状態数が無限：ベクトル ⟶ 関数

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_{\alpha i}|x_i\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle = \int dx\,\psi_\alpha(x)|x\rangle$$





$\psi_\alpha(x)$: 波動関数

波動関数の意味

- 粒子が位置 $x - \delta x/2$ から $x + \delta x/2$ の間に発見される確率 $P(x, \delta x)$

$$P(x, \delta x) = |\psi_\alpha(x)|^2 \delta x$$

物理量

行列だった物理量はどうなるか？

- 行列はベクトルを別のベクトルに変換＝状態を別の状態に変換

例）位置を少しずらす＝別の状態にするという操作 $D(\delta x)$

$$D(\delta x)|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}x \psi_\alpha(x) D(\delta x)|x\rangle = \int \mathrm{d}x \psi_\alpha(x)|x+\delta x\rangle$$

$$= \int \mathrm{d}x \psi_\alpha(x-\delta x)|x\rangle$$

$$\sim \int \mathrm{d}x \left(\psi_\alpha(x) - \frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x)\delta x + \cdots\right)|x\rangle$$

- 状態：ベクトル ⟶ 波動関数
- 物理量：行列 ⟶ 微分など
- 固有ベクトル ⟶ 固有関数

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \epsilon_a \psi(x)$$

代表的な物理量

- 運動量

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}$$

  - $\hbar = h/2\pi,\ \ h \sim 6.626 \times 10^{-34}\ [\mathrm{m^2kg/s}]$ （プランク定数）
- 運動量の固有状態：$\psi_k(x) \propto \cos kx + \mathrm{i}\sin kx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_k(x) = \hbar k \psi_k(x)$$

- 実部と虚部がそれぞれ波
- 長波長 ⟶ 運動量小さい，短波長 ⟶ 運動量大きい
- ノルムが x に依存しないことに注意（$\cos^2 kx + \sin^2 kx = 1$）

シュレーディンガー方程式（１次元）

- エネルギーはどんな演算子になるか？
  - 運動エネルギー＋位置エネルギー

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

- エネルギーの固有値と固有状態を調べる式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_\alpha(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi_\alpha(x) = E_\alpha \psi_\alpha(x)$$

（非時間依存型）シュレーディンガー方程式

ポテンシャルがない場合

- 運動量の固有状態と同じ

何もないときのエネルギー固有状態は広がった波

波動と粒子の二重性について

二重スリット実験（復習）

- 電子の「着弾点」はひとつひとつ見分けられる
- 「着弾点」の密度は電磁場の干渉パターンのような縞模様を作る
- 電子は波動と粒子の性質を同時に持つ

波動としての性質

- 決まった運動量をもって動く粒子の波動関数は波そのもの
- 波動関数は干渉を起こすことができる

粒子としての性質

- いざ位置を測定したらひとつの固有値 x が観測値として得られる
- 粒子が粒子として見えるということ
- 波動関数そのものが観測される訳ではない

エネルギーの量子化

箱の中に粒子を閉じ込める

- 波を閉じ込める
  - 壁のところで波動関数がゼロでなければならない
  - 壁より先で粒子が観測される確率はゼロ

量子力学では許される運動量が限られる

今の場合，エネルギーは運動量によって決まる

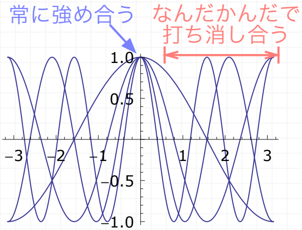
- 運動量がとびとび ⟶ エネルギーがとびとび

エネルギーの量子化

一般に，粒子を狭い範囲に閉じ込めようとするとエネルギーが量子化する

不確定性関係

- 運動量が決まった状態 ⟶ 波動関数のノルムが一定 ⟶ 粒子の位置が不明
- 局在した波動関数は様々な運動量を持つ状態の重ね合わせ



運動量を決めれば位置が決まらず，位置を決めれば運動量が決まらない ⟶　不確定性

$$\Delta x \Delta p > \hbar$$

Δx：座標の不確定性，Δp：運動量の不確定性

原子の安定性

原子：電子を狭い範囲に閉じ込める

- エネルギーの量子化
  - 原子は電磁波を放射して徐々にエネルギーを失うことは できない
- 不確定性関係
  - 遠心力がなくても電子は原子核へ落ちていけない
  - 電子の位置が原子核の位置に決まるなら運動量は不確定，すなわち大きな運動量を持つ状態を含むので運動エネルギーが大きくなってしまう

シュレーディンガーの猫

死んだ猫と死んでいない猫の重ね合わせ？？

- シュレーディンガーは，**ミクロな世界で成り立つ量子力学を安易にマクロな世界に適用すべきではない，**と言いたかった
- しかし，観測したら死んだ猫か死んでいない猫かどちらかしか観測されないのだから，（我々に見える範囲では）なんらおかしいことは起こっていない，という考え方もあり
- でも，観測って何？ 観測者は誰？ 人間？ 猫？
- 実は最近では，マクロな系で重ね合わせ状態を実現できたと言われている

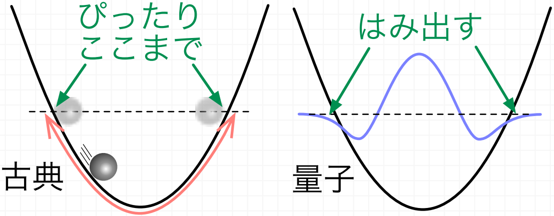
Quantum Biology

http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-21150047

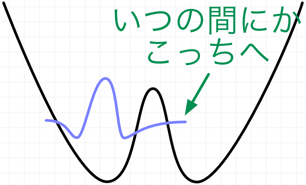
- トンネル効果 ⟶ 嗅覚
- 状態の重ね合わせ ⟶ 光合成の効率
- 光速を超える情報伝達 ⟶ 渡り鳥の方向感覚

トンネル効果

- 粒子を緩く束縛する



古典力学ではエネルギー保存則から許されない領域へ波動関数が染み出す！



- 薄い壁ならすり抜ける

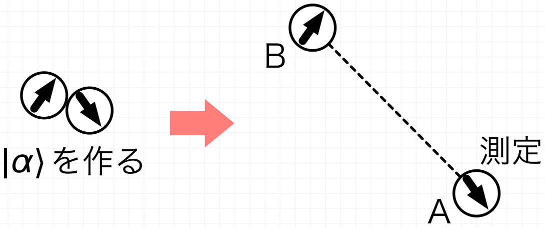
トンネル効果

量子エンタングルメント

- スピン２つ
- $\hat{S}_z^{(1)}$, $\hat{S}_z^{(2)}$ の固有状態 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ を使う
- 状態

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\}$$

  を作る
- スピンをいじらないように距離を離す
- 片方で測定をすると…



- A で ↑ → B で必ず ↓
- A で ↓ → B で必ず ↑

遠隔地での測定結果が瞬時に反映される