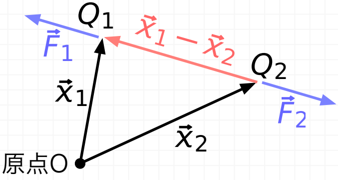
クーロンの法則

位置 $\vec{x}_1$ に電荷 Q_1 の点電荷１が，位置 $\vec{x}_2$ に電荷 Q_2 の点電荷２がそれぞれあるとき，点電荷１，２，が感じる力 $\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$ は，

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \qquad (1)$$

となる．（$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の長さ）

- 点電荷：電荷は持つが大きさは無視できる物体
- $1/(4\pi\epsilon_0) \sim 8.988\times10^9$ [N·m^2·C^{-2}]



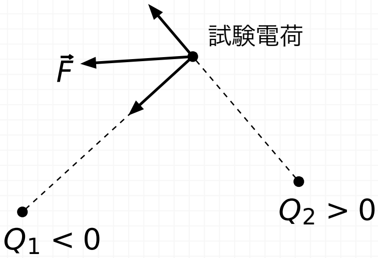
ポイント

- 力：電荷の積に比例，距離の２乗に反比例
- 同符号は斥力，異符号は引力
- 距離が近い方が力は強い

電荷が多数ある場合のクーロンの法則

- 固定されたいくつかの点電荷があることを想定
- ここにもう１つ点電荷（電荷 q_0）を持ち込む.
  - これを試験電荷と呼ぶ
- このとき試験電荷が感じる力は？
  - 便宜上 $q_0 > 0$
  - $q_0 < 0$ なら力の向きが逆になるだけ

固定された電荷が複数あるとき，試験電荷が感じる力は，
それぞれの電荷からの力の和（ベクトルの足し算）になる



電場とは

いくつかの固定された電荷があるところへ，試験電荷を持ち込む

- 力の向きと強さは位置に依存する
- 各位置の力 $\vec{F}(\vec{x})$ が知りたい

試験電荷の電荷 q_0 を固定すると，$\vec{F}(\vec{x})$ の構造は固定された電荷の配置で決まる

言い直し

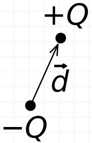
- 固定された電荷が各位置に「電場 $\vec{E}(\vec{x})$」を作る
- 持ち込んだ電荷は各位置で電場から力を受ける

電場を使ったクーロンの法則の言い直し

- 位置 $\vec{x}$ にあり電荷 q を持つ点電荷は位置 $\vec{x}$ における電場 $\vec{E}(\vec{x})$ から
$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}) \tag{2}$$
なる力を受ける
- 位置 $\vec{x}_0$ にあり電荷 Q を持つ点電荷は位置 $\vec{x}$ に
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3} \tag{3}$$
なる電場を作る

- 電場は位置 $\vec{x}$ ごとに決まる
- 複数の（固定された）点電荷があるとき電場は各点電荷の作る電場の和になる

電気双極子



- $+Q$ と $-Q$ の電荷をベクトル $\vec{d}$ だけ離して配置したもの
- 電気双極子モーメント $\vec{p} = Q\vec{d}$
- 原点に双極子をおいたときの遠い位置 $\vec{r}$ での電場
  - 遠い $r \gg |\vec{d}|,\ \ r = |\vec{r}|$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\}, \quad \hat{r} = \vec{r}/r \tag{4}$$

- 内積：$\vec{p}\cdot\hat{r} = |\vec{p}|\cos\theta$（$|\hat{r}| = 1$）
  - θ：$\vec{p}$ と $\vec{r}$ の間の角度
- 距離の３乗に反比例

電気双極子の重要性

- 電荷の総和がゼロとなる電荷の集合は遠くからみると電気双極子に見える（ことが多い）
- 電気双極子モーメントをもつ分子が存在する：水など

電場と電位の関係

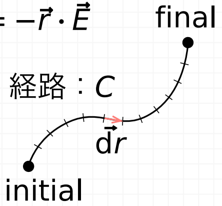
概要

- 電場：電荷に力＝電流を流そうとする「勾配」のようなもの
- 電位（電位差）：「勾配」に対応する「高さ」のようなもの
  - 電流は高いところから低いところへ流れようとする
  - 単位は V（ボルト），参）電池

式による表現

- 一様な電場 $\vec{E}$ の中でベクトル $\vec{r}$ だけ離れた２点間の電位差 $V_f - V_i$
  - 傾きが一定：距離長で高さ変化大
  - 距離が同じ：傾き大で高さ変化大
  - 勾配にそう：高さの変化大，勾配に直行：高さ変化なし

$$V_f - V_i = -|\vec{r}||\vec{E}|\cos\theta = -\vec{r}\cdot\vec{E} \qquad (5)$$



- 電場が非一様：経路を分割

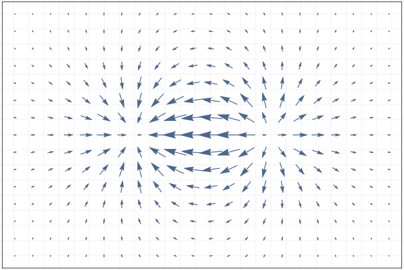
$$V_f - V_i = -\int_C \vec{dr}\cdot\vec{E}(\vec{r}) \qquad (6)$$

電場と電気力線

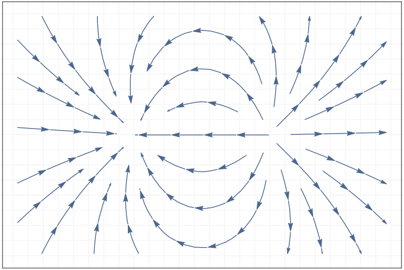
電気力線＝電場にそって引いた線

例

電場

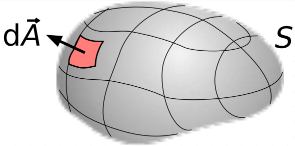


電気力線



ガウスの法則

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside } S}}{\epsilon_0} \qquad (7)$$



- S：３次元空間の任意の閉曲面
- $d\vec{A}$：S 上の微小平面
  - 長さは微小平面の面積，向きは微小平面に垂直で外向き
- $Q_{\text{inside } S}$：S の内部にある電荷の総和

意味

ある閉曲面を貫く電場の総量はその閉曲面内部の電荷の総量を ϵ_0 で割った物に等しい

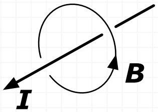
口語訳

- 電場は正の電場からわき出し，負の電荷に吸い込まれる

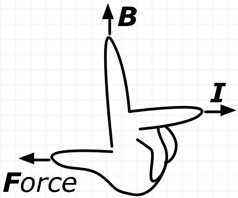
電流と磁場の相互作用〜直線電流の場合

- 電荷が電場を作り，また電荷が電場から力を受けるように，電流は磁場を作り，かつ電流は磁場から力を受ける

電流 I が作る磁場 B　右ねじの法則

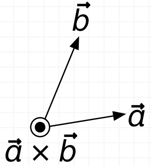


電流が磁場から受ける力（電流と磁場が垂直）　フレミング左手の法則



ローレンツ力

- 電流が磁場から力 $\longleftarrow$ 動いている電荷が磁場から力

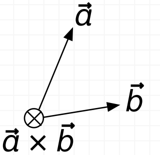


運動する点電荷が磁場から受ける力

磁場 $\vec{B}$ の中を速度 $\vec{v}$ で運動する電荷 Q の点電荷は

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{8}$$

なる力を受ける



$\vec{a} \times \vec{b}$: ベクトルの外積,
向き : $\vec{a}$, $\vec{b}$ 両者に垂直, 大きさ : $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の角度)

- 電場もあるとき

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{9}$$

ポイント

- 動いていなければ点電荷は磁場から力を受けない
- 磁場は運動の向きだけ変える

ビオ・サバール則

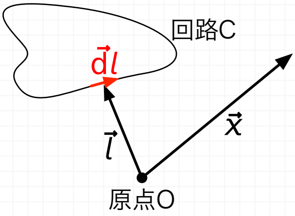
- 一般の電流が作る磁場を考える
- ただし，電流等の時間変化はなしとする

閉じた回路が作る磁場（時間変化なし → 回路は閉じていなければならない）

電流 I が流れている回路 C が位置 $\vec{x}$ に作る磁場は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{x} - \vec{l})}{|\vec{x} - \vec{l}|^3} \tag{10}$$

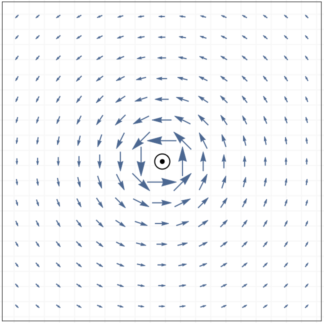
となる．（$I\mathrm{d}\vec{l}$ は電流要素，回路の一部分）
ただし，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}[\mathrm{T{\cdot}A^{-1}{\cdot}m}]$



電流の作る磁場〜例

直線電流

- 向き：右ねじの法則を再現
- 強さ：$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$

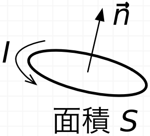


小さな円電流

- 原点に円電流をおいたとき<u>十分遠くで</u>

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\} \quad (11)$$

- 電気双極子と同じ形（原点付近は要注意）
- $\vec{m} = IS\vec{n}$：磁気双極子モーメント

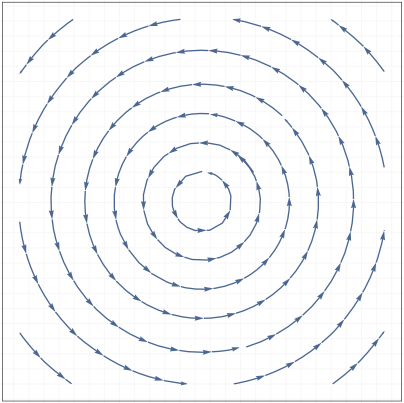


磁場と磁力線

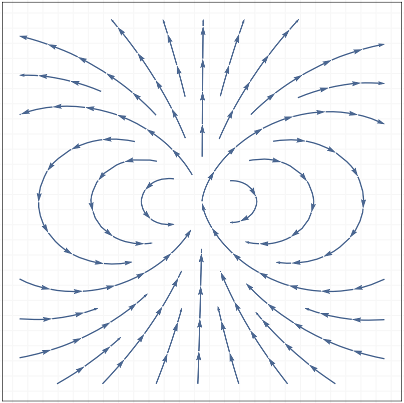
磁力線＝磁場にそって引いた線

＊電場と電気力線の関係と同じ

- 直線電流



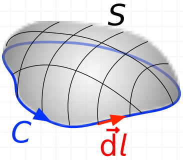
- （小さな）円電流



アンペールの法則

時間変化なしの場合を考える

$$\oint_C \vec{\mathrm{d}l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate S}} \qquad (12)$$



- C：向きをつけた閉曲線
- $\vec{\mathrm{d}l}$：微小な線要素
- S：C を縁とする曲面
  - 表裏：表から見て縁の閉曲線の向きが反時計回り
- 時間変化さえなければ S の選び方にはよらない
  - 電荷の保存，時間変化がなければ入ってきた電流は必ず出て行く

ある閉曲線にそった磁場を積分した量はその閉曲線を縁とする曲面を貫く電流に μ_0 をかけたものに等しい

口語訳

- 磁場は電流に巻き付く

磁気単極子

- 残された磁場の重要な性質

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \tag{13}$$

- 時間変化があるときでも成り立つ

意味

電場に対する点電荷の磁場バージョン（磁気単極子）は存在しない

少なくとも見つかっていない

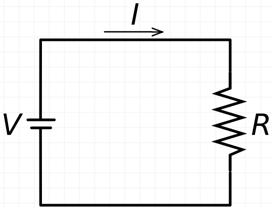
口語訳

- 磁場は沸き出したり吸い込まれたりしない
- N極だけの磁石は作れない！
- （参考）電場に対するガウスの法則

$$\int_S d\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside } S}}{\epsilon_0} \tag{14}$$

電流と電圧

オームの法則



$$V = IR$$

- 電圧をかければ電流が流れ，いろいろと仕事をさせられる

電磁誘導

- 電流は磁場を作る
- 磁場から電流を作ることができるか？ $\longrightarrow$ 時間変化があれば可能！

基本的な式

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} \tag{15}$$

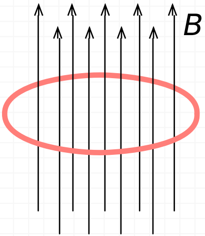
- $\mathcal{E}$：誘導起電力
  - 大雑把に言えば電圧 $\mathcal{E}$ の電池をつないだ感じ
  - ただし、時間変化があるときは「電圧」の意味に要注意
  - 実際に流れる電流はオームの法則とかを使って決める
- Φ：回路を貫く磁場の総量（磁束）
  - S：回路を縁とする任意の曲面
  - 曲面の裏表はアンペール則のときと同じ
  - 曲面の取り方によらない：磁気単極子は存在しない

レンツの法則

誘導起電力によって生じる電流の向き

必ず磁場の変化を打ち消す方向

- 上向きの磁場が強まったとき ⟶ 下向きの磁場を作る電流が生じる
- 上向きの磁場が弱まったとき ⟶ 上向きの磁場を作る電流が生じる
- 下向きの磁場が強まったとき ⟶ 上向きの磁場を作る電流が生じる
- 下向きの磁場が弱まったとき ⟶ 下向きの磁場を作る電流が生じる



磁場そのものの向きより 時間変化 が重要

２種類の電磁誘導

電流を流す＝電荷に力を加えるためには２通りの方法がある

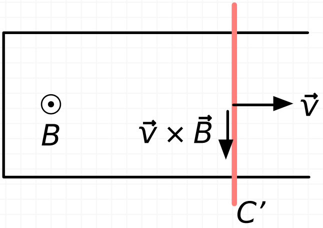
$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{16}$$

1. 磁場は変化せず，回路が動くことで Φ の時間変化が生じる場合
   $\longrightarrow Q\vec{v} \times \vec{B}$ を使う
2. 回路は動かず，磁場が変化することで Φ の時間変化が生じる場合
   $\longrightarrow Q\vec{E}$ を使う

回路を動かす場合

例

- 回路の一部分 C' を速さ v で動かす
- 磁場は図の向きで，強さは全体で一様（回路の中でも外でも）



このとき...

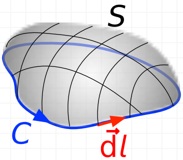
- C' 内の荷電粒子は磁場中を速度 $\vec{v}$ で動いていることになる
- よって C' 内の荷電粒子はローレンツ力 $Q\vec{v} \times \vec{B}$ を受ける
- ローレンツ力によって生じる電流の向きはレンツの法則を満たす

磁場が変化する場合

- まず磁場が変化すると電場が生じ，それが $\vec{F} = Q\vec{E}$ によって起電力を生む

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{17}$$

- C：向きをつけた閉じた回路
- S：C を縁として持つ向きをつけた曲面
- 磁場の時間変化 ⟶ 右辺がゼロでなくなる
- アンペール則のときと似た式の形



電場が磁場の時間変化に巻き付くように生じる

アンペール則の修正

- アンペール則の説明で時間変化がないことを使っていた
  - 右辺が曲面の取り方によらない
  - 時間変化があると右辺が局面の選び方＝人間の都合に依存してしまう
  - これを修正

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate } S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{18}$$

法則を単に矛盾の無いように書き換えただけでなく，電場の時間変化から磁場を作れることを意味している．

マックスウェル方程式

今までのまとめ

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{inside S}}}{\epsilon_0} \tag{19}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \tag{20}$$

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{21}$$

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{penetrate } S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{22}$$

- ∂S : S の縁

マックスウェル方程式：微分形

- 「マックスウェル方程式」としては以下の表現の方がよく使われる

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{23}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{24}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{25}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{26}$$

- $\vec{\nabla}\cdot$：微分演算子「発散」(空間微分)
- $\vec{\nabla}\times$：微分演算子「回転」(空間微分)
- ρ：電荷 密度
- $\vec{j}$：電流 密度

電磁波の存在

- 真空中（電荷と電流無し）のマクスウェル方程式から以下が導ける

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \tag{27}$$

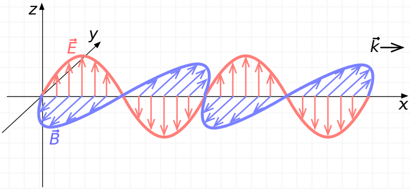
空間２階微分 ∝ 時間２階微分 ⟶ 波動方程式 ⟶ 電磁波

典型的な解

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta) \tag{28}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\hat{k}\times\vec{E}_0}{c}\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta) \tag{29}$$

- $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$：$\vec{k}$ と $\vec{E}_0$ は垂直
- $\vec{B}$ は $\vec{k}$ と $\vec{E}$ の両方に垂直
- $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $\omega = c|\vec{k}|$, $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$
- θ：位相，振動のタイミングを決める



解の性質

$\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)$

- 時間的に振動
  - 周波数（単位時間あたり何回振動するか）$\nu = \omega/2\pi$
  - 位相 θ はいつ最大値をとるのかを決めている
- 空間的に振動
  - 波長 $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$
  - 位相 θ はどこで最大値をとるのかを決めている
- 速さ c で進む

  例）$\vec{k} \parallel x$ 軸，$\theta = 0$，$t_0 \to t_0 + \Delta t$ の変化

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t_0 + \Delta t) &= \vec{E}_0 \sin(\omega(t_0 + \Delta t) - kx) \\
&= \vec{E}_0 \sin(\omega t_0 - k(x - c\Delta t))
\end{aligned}
\tag{30}
$$

  - Δt 秒たったとき，$x \to x + c\Delta t$ と置き換えればもとと同じ

周波数と波長の関係

- $\omega = c|\vec{k}| \longrightarrow \nu = c/\lambda$

電磁波の特徴付け

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\theta) \tag{31}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\frac{\hat{k}\times\vec{E}_0}{c}\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\theta) \tag{32}$$

$\vec{k}$ と $\vec{E}_0$（と θ）が電磁波を特徴付けている

＊ ω は $\vec{k}$ から $\omega=c\vec{k}$ と求まる

1. $\vec{k}$ の向き：電磁波の進む向き
2. $\vec{k}$ の大きさ：電磁波の名前，光の色
   - 波長 $\lambda=2\pi/|\vec{k}|$，振動数 $\nu=c|\vec{k}|/2\pi$
3. $\vec{E}_0$ の大きさ：電磁波の強度
   - 強度 $I\propto|\vec{E}_0|^2$
4. $\vec{E}_0$ の向き：偏光

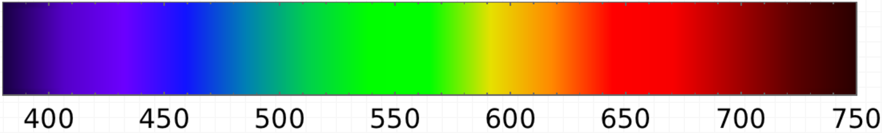
波長の違い

＊波長ごとに呼び方が違う（全部同じ電磁波）

	波長	細分化
電波	0.1mm 以上	マイクロ波、超短波、短波、etc
光	10nm-1mm	赤外線、可視光、紫外線
X 線	1nm 以下	
γ 線	10pm 以下	

波長と色

- 可視光：波長 350nm-750nm
- 可視光の場合，波長＝色
- 波長の短いものから順に，紫，青，緑，黄，橙，赤

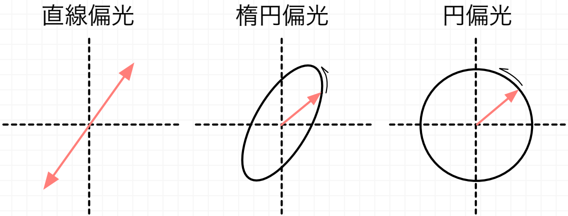


偏光

- 電場の向き
- 明るさ（強度）と色（波長）に続く電磁波の第３の性質

偏光の種類

- 直線偏光 $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} + \theta)$
  - $\vec{E}_0$ の向きが決まっている
- 円偏光 $\vec{E}(\vec{x},t) = E_0\hat{e}_1 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}) + E_0\hat{e}_2 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})$
  - $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2,\quad |\hat{e}_1| = |\hat{e}_2| = 1$
  - 位相 θ の異なる２つの電磁波（直線偏光）を重ね合わせたものとみなせる
  - 右回りと左回りがある
- 楕円偏光：直線偏光と円偏光の中間
- 偏光していない光（自然光）：偏光の向きが時々刻々と変わる

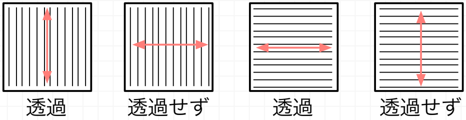


偏光板による光の制御

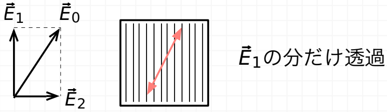
偏光板：偏光が特定の向きの電磁波のみ透過する

＊便宜上「特定の向き」を縞模様の向きで表す

- 直線偏光

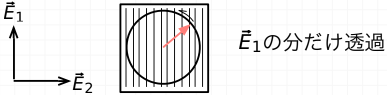


- 斜めの場合：直線偏光を位相がそろった２つの直線偏光の和で表す



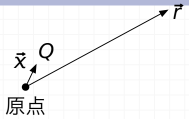
  - 透過後〜偏光の向き：$\vec{E}_1$ の向き，光の強度 I：$I \propto |\vec{E}_1|^2 < |\vec{E}_0|^2$

- 円偏光：円偏光は位相のずれた２つの直線偏光の和ともみなせる



  - 透過後の光は直線偏光で向きは $\vec{E}_1$ の向き

電磁波の放射



運動する荷電粒子が作る電場を考える

- 荷電粒子の位置を $\vec{x}$，電場を観測する位置を $\vec{r}$ とおくと $|\vec{x}| \ll |\vec{r}|$ のとき

$$\vec{E}(\vec{r},t) \sim -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{|\vec{r}|}\{\ddot{\vec{x}}(t') - (\hat{r}\cdot\ddot{\vec{x}}(t'))\hat{r}\} \tag{33}$$

  - $\ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$：位置の時間による２階微分，速度の時間微分
  - $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$，$t' = t - |\vec{r}|/c$
- $\ddot{\vec{x}}(t') - (\hat{r}\cdot\ddot{\vec{x}}(t'))\hat{r}$ は $\ddot{\vec{x}}(t')$ の $\vec{r}$ に垂直な成分を表す
- つまり電磁波は 荷電粒子が加速度を持つように**見えるとき** 現れる
- $t' = t - |\vec{r}|/c$ が出てくる理由：「加速度を持った」という情報が伝わるのに $|\vec{r}|/c$ だけの時間がかかる

クーロンの法則はどこへ行った？

- 上の電磁波は $|\vec{r}|$ に反比例
- クーロンの法則の電場は $|\vec{r}|$ の 2乗 に反比例
- 遠距離では電磁波が優位

アンテナ

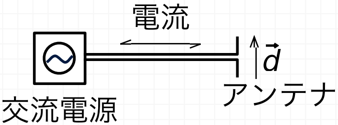
単振動する荷電粒子からの放射

- $\vec{x}(t) = \vec{d}\sin(\omega t + \theta)$ のとき

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \sim \frac{Q\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}|} \{\vec{d} - (\hat{r} \cdot \vec{d})\hat{r}\} \sin(\omega t - k|\vec{r}| + \theta) \tag{34}$$

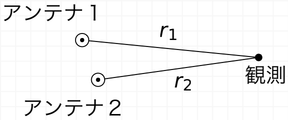
- $k = \omega/c$

微小双極子アンテナ



- 単振動する荷電粒子からの電磁波とだいたい同じ

電磁波の重ね合わせと干渉



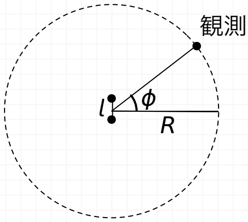
- 電磁波の源（アンテナ）が複数ある状況を考える
- $\vec{d} \perp \vec{r}$ の状況を考える
- 電磁波は $\frac{1}{|\vec{r}|}\sin(\omega t - k|\vec{r}| + \theta)$ に比例
- それぞれのアンテナからの距離が違う，またはそれぞれのアンテナの位相 θ が違うと sin 関数の中身が違う
  $\longrightarrow$ 電磁波が強め合う場合と弱め合う場合がある → 電磁波の干渉
- $*\ |r_1 - r_2| \ll r_1, r_2$ なら $\frac{1}{|\vec{r}|}$ の分の違いは無視できる

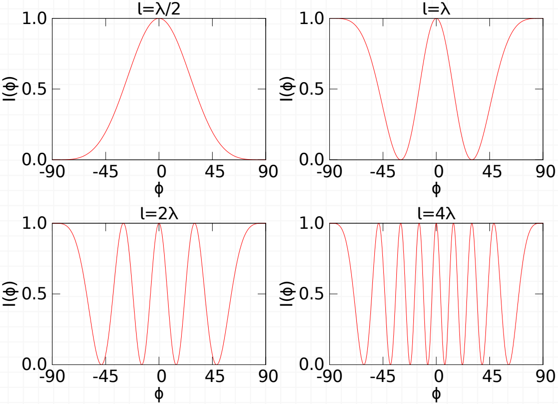
干渉

- 電磁波に限らず重ね合わせの効く波なら一般に干渉を起こす
- ２つの波の出っ張っているところ同士が重なれば強め合い，出っ張っているところとへこんでいるところが重なれば弱め合う

干渉〜例

位相のそろった アンテナ２つ





- $l \ll R$ のときの角度 ϕ の方向の電磁波の強度

$$I(\phi) \propto \left(\cos\left(\frac{\pi l}{\lambda}\sin\phi\right)\right)^2$$

量子力学の必要性

- 原子の安定性
  - 電子が原子核の周りをまわっていると思うと電磁波を放射してエネルギーを失う？
- 二重スリット実験～電子の干渉実験
  - 電子は波動と粒子の性質を同時に持つ
  - 電子はつぶつぶに見えるが干渉を起こす
- シュテルン・ゲルラッハ実験～銀原子のスピン（＝電子のスピン）の測定
  - 物理量の量子化
  - 状態の重ね合わせ（スピンが横向きの状態は，スピンが上向きでもあり下向きでもある，etc.）

量子力学における状態と観測

状態と物理量の記述

- 状態：ノルム 1 の複素ベクトル
- 物理量：複素エルミート行列 $\hat{A}^\dagger = \hat{A}, \quad (\hat{A}^\dagger)_{ij} = (\hat{A}_{ji})^*$

例）電子のスピン

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \tag{36}$$

量子力学における観測

- 物理量は行列だが観測したら実数になってほしい $\longrightarrow$ 行列の固有値

状態 $|\alpha\rangle$ がある物理量 $\hat{A}$ の固有状態（固有ベクトル）であるとき物理量 $\hat{A}$ の観測値はその固有値 ϵ_α となる

固有状態でない状態の観測

- ある物理量 $\hat{A}$ の測定をしたい
- $\hat{A}$ の固有状態でない状態も $\hat{A}$ の固有状態の和に分解できる

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_i |\hat{A} : \epsilon_i\rangle, \quad \sum_i |c_i|^2 = 1 \tag{37}$$

ただし，$|\hat{A} : \epsilon_i\rangle$ は $\hat{A}$ の固有ベクトルで固有値が ϵ_i のもの

状態 $|\alpha\rangle$ について物理量 $\hat{A}$ の測定を行うと，確率 $|c_i|^2$ で ϵ_i が観測され，測定後の状態は選ばれた固有値に対応する固有状態になる.

ポイント

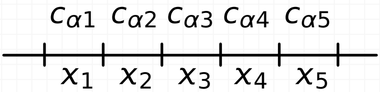
- 測定値は確率的にしか決まらない！
- 観測が状態を変える！

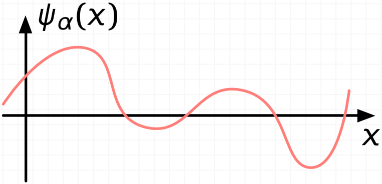
波動関数

粒子の運動の量子力学的表現

- 状態を座標の固有状態の重ね合わせとして書く！
  - 座標の固有状態 $|x\rangle$：位置を測定すれば必ず x になる状態
- 状態をベクトルで書いたとき成分数は全く異なる状態の数
- 座標が違う → 全く違う状態というべき
- 可能な状態の数が無限にある！ → ベクトルから関数へ

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_{\alpha i}|x_i\rangle \longrightarrow |\alpha\rangle = \int \mathrm{d}x\,\psi_\alpha(x)|x\rangle \tag{38}$$





$\psi_\alpha(x)$: 波動関数

波動関数の意味と物理量

波動関数の意味

- 状態 $|\alpha\rangle$ を用意
- 粒子が位置 $x - \delta x/2$ から $x + \delta x/2$ の間に発見される確率 $P(x, \delta x)$

$$P(x, \delta x) = |\psi_\alpha(x)|^2 \delta x \tag{39}$$

- 波動関数 $\psi_\alpha(x)$ のノルムの２乗は，粒子が x にいる確率を表す

物理量

- 行列 $\longrightarrow$ 微分など
- 例）運動量

物理量の例：運動量

- 運動量

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} \tag{40}$$

  - $\hbar = h/2\pi, \;\; h \sim 6.626 \times 10^{-34}$ [m^{2}kg/s]（プランク定数）

- 運動量の固有状態

$$\psi_k(x) \propto \cos kx + \mathrm{i}\sin kx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{41}$$

実際

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_k(x) = \hbar k \psi_k(x) \tag{42}$$

要点

- 長波長 ⟶ 運動量小，短波長 ⟶ 運動量大
- ノルムが x に依存しない（$\cos^2 kx + \sin^2 kx = 1$）

運動量の例：エネルギー

- エネルギーはどんな演算子になるか？
  - 運動エネルギー＋位置エネルギー

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{43}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{44}$$

- エネルギーの固有値と固有状態を調べる式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi_\alpha(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi_\alpha(x) = E_\alpha \psi_\alpha(x) \tag{45}$$

（非時間依存型）シュレーディンガー方程式

- ポテンシャル無し $\longrightarrow$ 固有状態は運動量と同じ $\longrightarrow$ 波

エネルギーの量子化

箱の中に粒子を閉じ込める

- 量子力学：波を閉じ込める
  - 壁のところで波動関数がゼロでなければならない
  - 壁より先で粒子が観測される確率はゼロ

量子力学では許される運動量が限られる

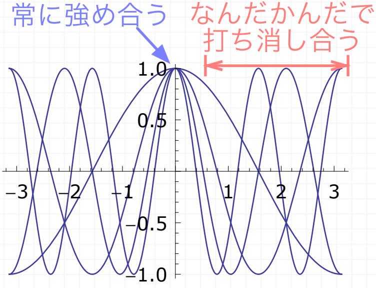
今の場合，エネルギーは運動量によって決まる

- 運動量がとびとび → エネルギーがとびとび → **エネルギーの量子化**

一般に，粒子を狭い範囲に閉じ込めようとするとエネルギーが量子化する

不確定性関係

- 運動量が決まった状態 ⟶ 波動関数のノルムが一定 ⟶ 粒子の位置が不明
- 局在した波動関数は様々な運動量を持つ状態の重ね合わせ



運動量を決めれば位置が決まらず，位置を決めれば運動量が決まらない
⟶ 不確定性

$$\Delta x \Delta p > \hbar \tag{46}$$

- Δx：座標の不確定性
- Δp：運動量の不確定性